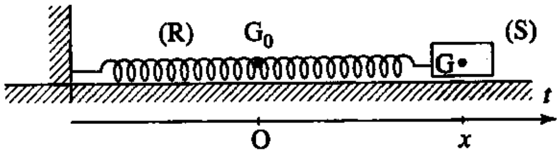
P12-OSCILLATIONS MECANIQUES

TRAVAUX DIRIGES TERMINALE S

1 Oscillateur mécanique horizontal

Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort à spires non jointives de raideur k dont une extrémité est fixée à un solide S de dimensions telles qu'il peut être assimilé à un solide ponctuel de masse m. L'autre extrémité du ressort est fixe (voir figure ci-contre).

On donne : m = 100 g ; k = 40 N.m^{-1}



Dans cette expérience, on néglige tous les frottements.

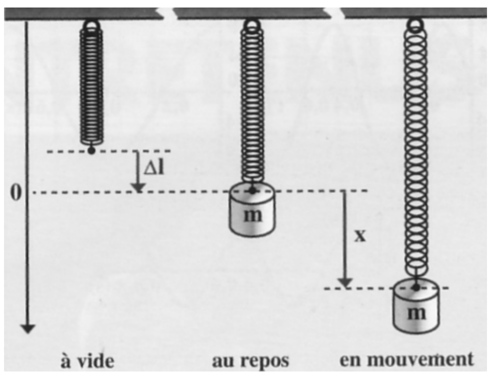
Le plan sur lequel se déplace le solide S est horizontal. La position du centre d'inertie G est donnée par le vecteur position $\overrightarrow{OG} = x\,\vec{i}$.

L'origine du repère est choisie de telle sorte que lorsque l'oscillateur passe par sa position d'équilibre, on ait $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$.

1) Indiquer sur un schéma les forces appliquées à S lorsque l'on a $\overrightarrow{OG} = x\,\vec{i}$, pour x différent de zéro.
2) Établir l'équation différentielle du mouvement de S.
Calculer la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 de l'oscillateur.
3) Donner la forme générale de l'équation horaire du mouvement de S.
4) On écarte S de sa position d'équilibre d'une quantité $X_o = +3$ cm et on libère S sans vitesse initiale à une date prise comme origine des temps. Etablir l'équation horaire du mouvement de S.
5) Donner en fonction du temps les expressions numériques de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique de cet oscillateur.
Vérifier que son énergie mécanique est constante.

2 Oscillations mécaniques libres d'un pendule élastique vertical

Dans l'exercice on prendra comme valeur de l'accélération de la pesanteur g = 10 m.s^{-2}
Un oscillateur harmonique est constitué d'un ressort R de masse négligeable suspendu en un point fixe A et auquel est accroché un solide S de masse m = 200 g et d'inertie G.
1) La longueur à vide du ressort est $l_0 = 20$ cm. On accroche le solide S, le ressort s'allonge de 8 cm. Calculer la constante de raideur k du ressort.

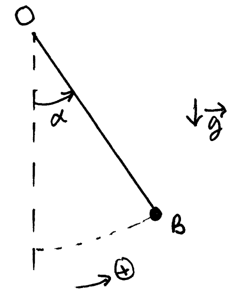


2) On tire le solide S verticalement, vers le bas, en donnant un allongement supplémentaire de $X_0 = 1$ cm au ressort, puis on lâche le solide sans vitesse initiale. Il effectue alors des oscillations que l'on supposera non amorties de période T_0.
2.a- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2.b- Déterminer l'équation horaire x = f(t) en prenant comme origine des temps l'instant du lâcher et comme origine O des déplacements la position d'équilibre du ressort avec solide accroché. On choisira un axe Ox vertical orienté positivement vers le bas.
2.c- Calculer la période propre T_0 des oscillations.

3 Le pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'un objet ponctuel B, de masse m, suspendu en un point O par un fil tendu sans raideur et sans masse, de longueur l dans le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme ; on considérera le référentiel terrestre comme galiléen.

On note □ l'angle que fait le fil de suspension avec la verticale ; on étudie les mouvements dans le plan vertical de la figure ci-contre.



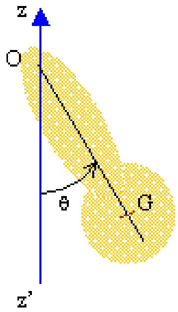
1) A quelle condition sur la durée de l'expérience le référentiel terrestre peut-il être considéré comme galiléen ?
2) Etablir l'équation différentielle du mouvement du point B, vérifiée par l'élongation angulaire □ du pendule ?
3) A quelle condition le pendule sera-t-il considéré comme un oscillateur harmonique ?
Quelle est alors l'expression littérale de sa pulsation ω_0 ?

4 Le pendule pesant

Il est constitué d'un solide de masse m et de centre de gravité G, mobile, sans frottement autour d'un axe horizontal Δ, perpendiculaire au plan de la figure. Le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe est J_Δ.

1) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$. Montrer que si θ reste petit, le pendule pesant peut être assimilé à un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J_\Delta}}$ où a = OG.

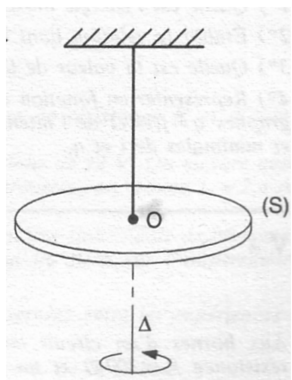
2) Déterminer la longueur L du pendule simple synchrone à ce pendule pesant.



OG = a

5 Le Pendule de torsion

On considère le dispositif représenté ci-dessous. Le fil vertical a pour constante de torsion $C = 4{,}50.10^{-4}$ N.m.rad^{-1}.



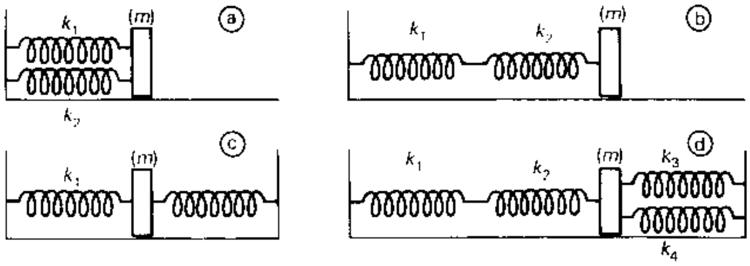
Il est lié au centre O du disque (S) horizontal, homogène, de moment d'inertie par rapport à l'axe Δ, $J_\Delta = 3{,}8.10^{-3}$ kg.m^2.

A la date t = 0, le disque (S), en rotation autour de l'axe à passe à sa position d'équilibre, caractérisée par $\theta = 0$, avec la vitesse angulaire $\dot{\theta} = 3{,}50.10^{-1}$ rad.s^{-1}, dans le sens positif indiqué sur le schéma.
1) En négligeant tout frottement, établir l'équation différentielle du mouvement du disque (S).
2) En déduire l'équation horaire de ce mouvement.

3) Rechercher la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du disque après une rotation de +3° à partir de la date t = 0.

6 Oscillateurs avec plusieurs ressorts.

Tous les ressorts représentés à la figure ci-dessous ont même longueur naturelle (à tension nulle) et ne sont pas allongés dans la position considérée. Leur constante de raideur est indiquée sur le schéma. On néglige tous les frottements.



Déterminer dans chaque cas la période des oscillation de la masse m et la constante de raideur du ressort équivalent (ressort unique qui provoquerait des oscillation de même période).

7 Oscillations avec un ou deux ressorts.

On dispose d'un ressort R, de masse négligeable et de raideur k. L'une des extrémités est fixée à un support rigide et à l'autre extrémité est suspendu un solide (S) de masse M = 0,1 kg.

On déplace le solide (S) verticalement vers le bas d'une longueur X.

1) Étudier le mouvement de (S) lorsqu'on le lâche sans vitesse initiale.

On mesure la durée de dix oscillations de (S), on trouve t = 2,98 s. Calculer la constante de raideur k_1.

2) Le ressort R_1 et le Solide (S) sont disposés sur un plan incliné comme l'indique la figure 1 ci-contre. On néglige tous les frottements. Calculer la période des oscillations du solide (S).

3) On associe au ressort R_1 un ressort R_2 comme l'indique la figure 2. Il est de masse négligeable et de constante de raideur k_2. À l'ensemble, on suspend le solide (S).

3.a- Le système étant à l'équilibre, donner l'expression des allongements X_1 et X_2 des 2 ressorts.

3.b- Déterminer, en fonction de k_1 et k_2 la raideur k du ressort équivalent qui, à l'équilibre, sous l'influence de (S) subirait l'allongement $X = X_1 + X_2$.

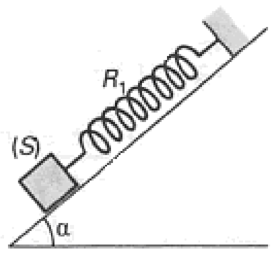


figure 1

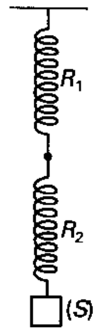
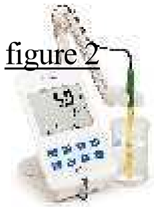


figure 2



4) On déplace (S) verticalement vers le bas et on le lâche.
Calculer la Période T' des oscillations du solide (S). Faire l'application numérique avec $k_2 = 20\ N.m^{-1}$.

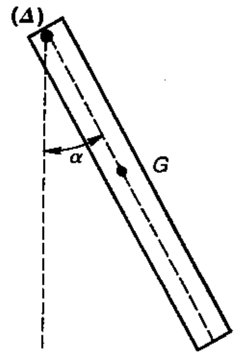
8 Le pendule pesant

Données : $m = 200$ g ; $g = 10\ m.s^{-2}$; $L = 60$ cm ; $\alpha_0 = 9°$.

Une tige homogène OA, de masse m et de longueur L peut osciller sans frottement autour d'un axe (Δ), passant par son extrémité O.

1) Calculer le moment d'inertie J_Δ du pendule.

Rappels :



- Moment d'inertie d'une tige homogène de masse m et de longueur L par rapport à un axe passant par son centre d'inertie G :

$$J_G = \frac{1}{12} mL^2$$

- **Théorème de HUYGHENS :** Soit un solide homogène de centre d'inertie G. Son moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) ne passant pas par G est donné par :

$$J_\Delta = J_G + md^2$$

L'axe passant par (Δ) et l'axe passant par G sont parallèles et distants de d.

2) On écarte le pendule d'un petit angle □$_0$ (□$_0$ < 16°) puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

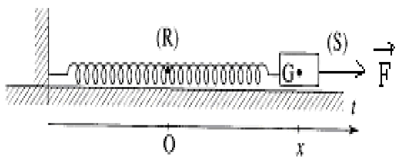
2.a- Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule.
2.b- Calculer la période propre T_0 et la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

3) En utilisant la méthode énergétique, retrouver l'équation différentielle du pendule.
4) calculer la longueur L du pendule simple synchrone à ce pendule pesant.

9 Oscillateur horizontal avec frottement fluide- Oscillations entretenues

Un ressort (R) à spires non jointives, parfaitement élastique et de masse négligeable, a une constante de raideur k. Il est relié à un solide (S) de masse m, à l'une de ses extrémités, l'autre est fixe. Les oscillations de (S) sont entretenues grâce à une force F horizontale telle que F = F.cos ($\omega t + \varphi$). Dans son mouvement, le solide (S) est soumis à une force de frottement fluide $\vec{F} = -$□$\vec{V}$; $\vec{V}$ étant le vecteur vitesse du solide (S) en translation et □ une constante positive appelée coefficient de frottement.

1) En utilisant le théorème du centre d'inertie, montrer que l'élongation x vérifie l'équation différentielle :



$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \square \frac{dx}{dt} + kx = F_m.\cos(\omega t + \varphi).$$

2) On prendra comme solution d'une telle équation $x = X_m\cos\omega t$. A l'aide de la construction de Fresnel, déterminer les expressions de $\tan\varphi$ et de X_m en fonction de F_m, □, ω, k et m.

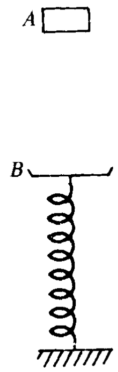
3)
3.a - Pour quelle valeur de ω notée ω_r, a-t-on la résonance d'amplitude. (C'est-à-dire que l'amplitude X_m est maximale).

3.b - Quelle condition doit vérifier □ pour que ω_r, existe ?
Calculer ω_r, pour k = 150 N.m^{-1} ; m = 500 grammes et □ = 10 SI. (**Extrait BAC S1S3 2000**)

10 Choc mou sur une balance à ressort

Un solide (A) de masse m, tombe d'une hauteur h, sur le plateau d'une balance à ressort.

La masse du plateau est M ; le ressort est à spires non jointives et a une constante de raideur k.



1) Exprimer la vitesse V_0 du système constitué par le solide (A) et le plateau juste après le choc.

2) Etablir l'équation différentielle du mouvement du système considéré après le choc.

3) Donner en fonction de k, m et M les expressions de la période propre T_0 et de la pulsation propre ω_0 des oscillations.

4) L'équation du mouvement est de la forme : $x = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

On prendra comme instant initial l'instant du choc et la nouvelle position d'équilibre X_0

du plateau comme origine sur l'axe Ox vertical dirigé vers le has.

Donner en fonction de k, m, M, g et h l'expression de X_m et $\tan\varphi$.

$\boxed{11}$ Oscillations verticales avec deux ressorts en série

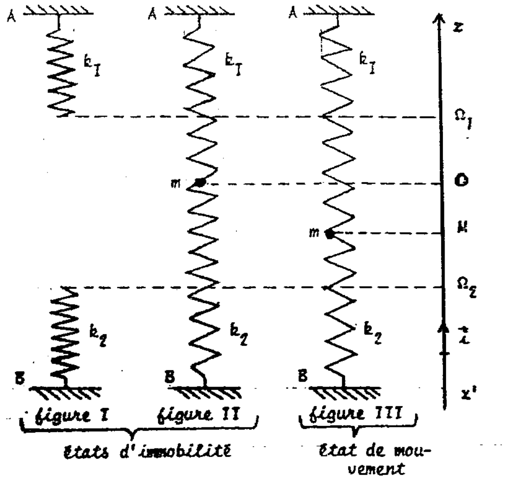
<u>Données</u> : b = 3 cm ; m = 100 grammes ; $k_1 = 10\ N.m^{-1}$; $k_2 = 5\ N.m^{-1}$

On dispose de deux ressorts de masses négligeables et de constantes de raideur k_1 et k_1.

On suspend le ressort n° 1 à un crochet A, et le ressort n°2 à un point B du sol. (figure 1), les ressorts gardent toujours la direction verticale.

Sur un axe vertical x'Ox dirigé vers le haut, on repère par Ω_1 et Ω_2 les positions des extrémités libres des ressorts n°1 et n°2 (les ressorts ne sont ni étirés, ni comprimés).

On accroche les extrémités libres des ressorts à une masse m supposée ponctuelle (fig. 2). On repère la position de la masse m, à l'équilibre par le point O sur l'axe x'Ox. On écarte, vers le haut, la masse m d'une longueur b.

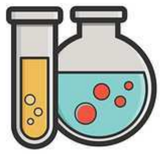


A l'instant t = 0 on le lâche sans vitesse initiale.

On repère la position de la masse durant son mouvement à un instant t par le point M avec $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i}$ (fig. 3)

1) Trouver l'équation différentielle du mouvement de la masse m.

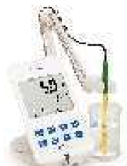
2) Trouver la solution de cette équation x(t) en fonction des paramètres b, k_1, k_2 et m.
Donner l'expression numérique de x en fonction de t.



3) Calculer la période T des oscillations et la fréquence N.

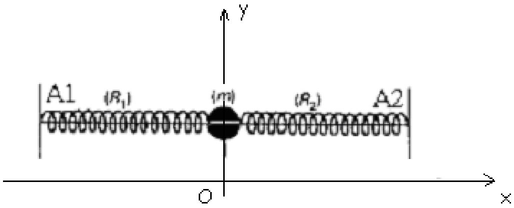
4) Exprimer l'énergie potentielle de ce système à un instant t quelconque. On choisira l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = 0$ pour M en O (x = 0).

5) Exprimer l'énergie cinétique du système à un instant t quelconque. En déduire l'énergie mécanique totale E. Que peut-on en dire ? **(Extrait BAC CE 92)**



$\boxed{12}$ Oscillations transversales et longitudinales avec deux ressorts

Un palet à coussin d'air, de masse m = 50 g mobile sur une table horizontale, est accroché à deux ressorts identiques R_1 et R_2, de masses négligeables tendus entre deux points A_1 et A_2 comme l'indique la figure ci-contre.



Les ressorts, de constantes de raideur $k_1 = k_1 = 7{,}2\ N.m^{-1}$ et de longueur à vide commune $l_0 = 25$ cm ont pour longueurs $l_1 = l_2 = 30$ cm lorsque le palet est à l'équilibre. Les frottements sont supposés négligeables.

On écarte le palet de sa position d'équilibre de telle sorte que son centre d'inertie G se déplace dans la direction A_1A_2, vers A_1, de $\overline{OC} = -2$ cm puis on l'abandonne, sans vitesse initiale à un instant qui sera choisi comme origine des dates.

1.a- Donner, à une date t quelconque, l'expression de l'allongement de chacun des ressorts en fonction de l'abscisse x de G.

1.b- Établir l'équation différentielle du mouvement de G.

1.c- Exprimer et calculer la pulsation et la période propre du mouvement.

1.d- Écrire l'équation horaire du mouvement de G.

2) On écarte le palet de sa position d'équilibre de telle sorte que son centre d'inertie se déplace, dans la direction de l'axe y'Oy perpendiculaire à A_1A_2, de OG = y puis on l'abandonne sans vitesse initiale à un instant qui sera choisi comme origine des dates. Le palet se met alors à effectuer des oscillations longitudinales suivant l'axe y'Oy. On notera l la longueur de chaque ressort pendant les oscillations.

2.a- Montrer que l'équation différentielle du mouvement longitudinal du palet est donnée par :

$$m\ddot{y} + 2k\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)Y = 0$$

L'oscillateur obtenu est-il harmonique ?

2.b- Montrer que dans le cas des petites oscillations (si $\frac{y}{l} << 1$), L'oscillateur peut être considéré comme harmonique. Donner, dans ce cas, l'expression de sa période propre T_0 et calculer sa valeur.

13 Oscillations d'une molécule diatomique

Données :

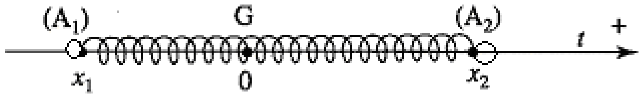
- masses molaires atomiques en $g.mol^{-1}$: $M_c = 12$; $M_O = 16$.
- nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02.10^{23}\ mol^{-1}$
- vitesse de la lumière dans l'air : $c = 3{,}00.10^{8}\ m.s^{-1}$.

Il s'agit, dans cet exercice, d'étudier les vibrations longitudinales de la molécule de monoxyde de carbone (CO).

On la modélisera par un système à deux corps reliés par un ressort élastique et on montrera que les oscillations harmoniques dépendent des caractéristiques de la molécule.

Deux corps ponctuels (A_1) et (A_2) de masses respectives m_1 et m_2 sont reliés par un ressort élastique à spires non jointives de constante de raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide l_0 .
Les deux corps sont mobiles sur une tige fixe horizontale.

On repère leurs positions par leurs abscisses $x_1 = \overline{GA_1}$ et $x_2 = \overline{GA_2}$, G étant le centre de masse de ce système. Les frottements sont négligeables.
À t = 0 on écarte ces 2 corps ponctuels de leurs positions d'équilibre et on les lâche sans vitesse initiale.



1) On pose $x = x_2 - x_1$.
Etablir l'équation différentielle vérifiée par y.
2) Exprimer la période T avec laquelle les corps A_1 et A_2 oscillent l'un par rapport à l'autre en fonction de k, m_1 et m_2.
3) Le système précédent modélise les vitesses longitudinales de la molécule de monoxyde de carbone CO.
La longueur d'onde associée à la fréquence propre □ de ces vibrations est $\lambda = 4{,}60\ \mu m$.

3.a- Déterminer cette fréquence propre. Faire l'application numérique.

3.b- Déterminer la constante de raideur k associée à la liaison carbone-oxygène de cette molécule. Faire l'application numérique.